2.3. Polinomi

16.10. 2020.

Fotografija: Steven Ford

Polinomi

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Polinomi

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ako $a_n \neq 0$, kažemo da je f **stupnja** n i pišemo

$$\deg f = n.$$

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ako $a_n \neq 0$, kažemo da je f **stupnja** n i pišemo

$$\deg f = n.$$

PR.:

Polinomi

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ako $a_n \neq 0$, kažemo da je f **stupnja** n i pišemo

$$\deg f = n.$$

PR.:

- $f(x) := x^3 - 2x^4 + 1$ je polinom stupnja 4.

Polinomi

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ako $a_n \neq 0$, kažemo da je f **stupnja** n i pišemo

$$\deg f = n.$$

PR.:

- $f(x) := x^3 - 2x^4 + 1$ je polinom stupnja 4.
- $f(x) := x$ je polinom stupnja 1.

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ako $a_n \neq 0$, kažemo da je f **stupnja** n i pišemo

$$\deg f = n.$$

PR.:

- $f(x) := x^3 - 2x^4 + 1$ je polinom stupnja 4.
- $f(x) := x$ je polinom stupnja 1.
- $f(x) := 5$ je polinom stupnja 0.

Polinomi

Definicija. Polinom je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom oblika

$$f(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

za neke $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

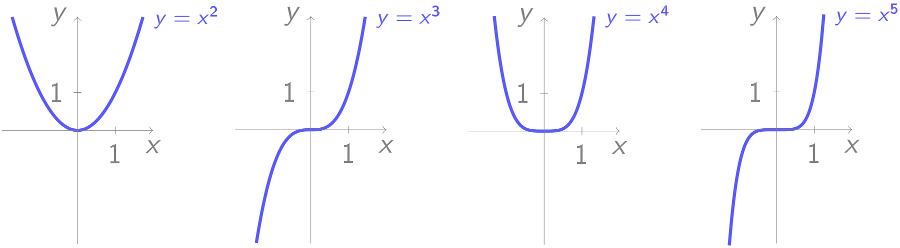
Ako $a_n \neq 0$, kažemo da je f **stupnja** n i pišemo

$$\deg f = n.$$

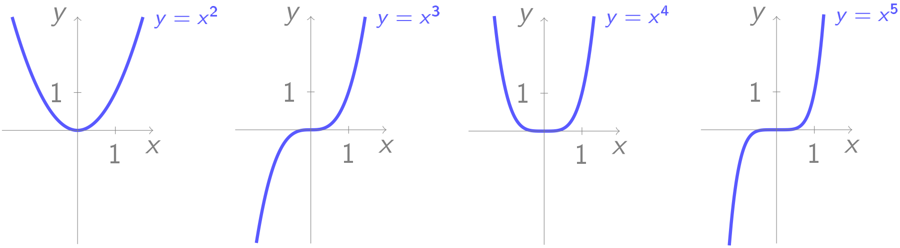
PR.:

- $f(x) := x^3 - 2x^4 + 1$ je polinom stupnja 4.
- $f(x) := x$ je polinom stupnja 1.
- $f(x) := 5$ je polinom stupnja 0.
- $f(x) := 0$ je tzv. **nulpolinom**; njegov stupanj nećemo definirati (u literaturi se ponekad definira $\deg 0 := -1$ ili $\deg 0 := -\infty$).

Primjer 1



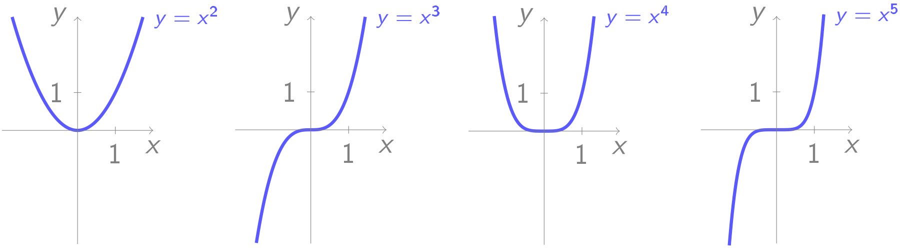
Primjer 1



Definicija. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **parna** ako vrijedi

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in D.$$

Primjer 1



Definicija. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **parna** ako vrijedi

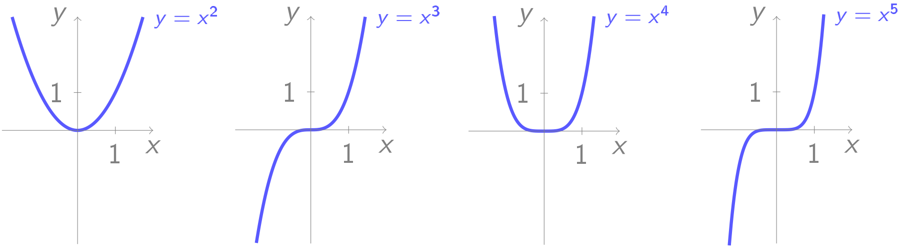
$$f(-x) = f(x), \qquad x \in D.$$

PR.: Za svaki paran $n \in \mathbb{N}$, funkcija $f(x) := x^n$ je parna:

$$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Posebno su funkcije x^2 i x^4 parne.

Primjer 1



Definicija. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **parna** ako vrijedi

$$f(-x) = f(x), \qquad x \in D.$$

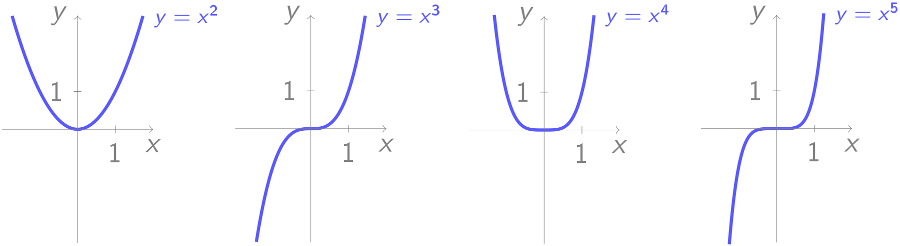
PR.: Za svaki paran $n \in \mathbb{N}$, funkcija $f(x) := x^n$ je parna:

$$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Posebno su funkcije x^2 i x^4 parne.

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je parna $\Leftrightarrow$ Γ_f je osnosimetričan s obzirom na y-os.

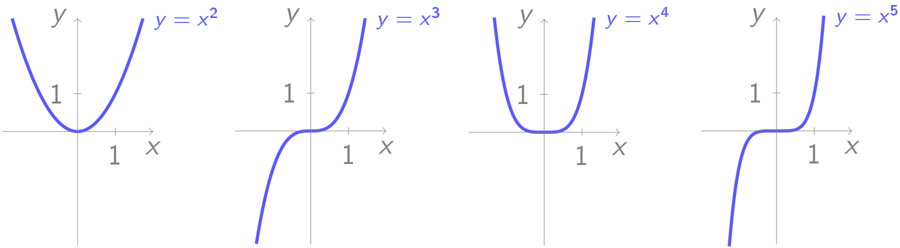
Primjer 1



Definicija. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **neparna** ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in D.$$

Primjer 1



Definicija. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **neparna** ako vrijedi

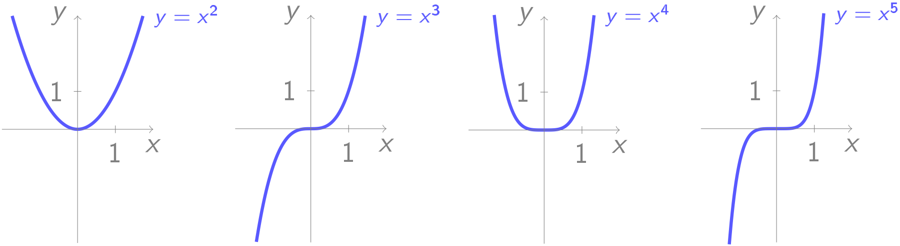
$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in D.$$

PR.: Za svaki neparan $n \in \mathbb{N}$, funkcija $f(x) := x^n$ je neparna:

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Posebno su funkcije x^3 i x^5 neparne.

Primjer 1



Definicija. Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **neparna** ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x), \qquad x \in D.$$

PR.: Za svaki neparan $n \in \mathbb{N}$, funkcija $f(x) := x^n$ je neparna:

$$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Posebno su funkcije x^3 i x^5 neparne.

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neparna $\Leftrightarrow$ Γ_f je centralnosimetričan s obzirom na ishodište.

Primjer 2

Definiramo

$$f(x) := x^5 + 1.$$

Primjer 2

Definiramo

$$f(x) := x^5 + 1.$$

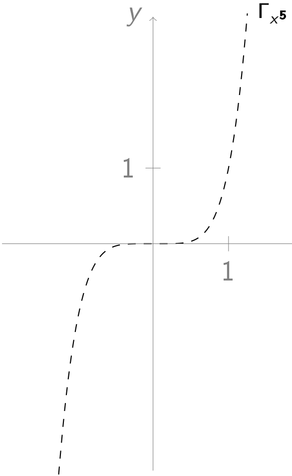
Γ_f se dobije iz Γ_{x^5} translacijom za 1 prema gore:

Primjer 2

Definiramo

$$f(x) := x^5 + 1.$$

Γ_f se dobije iz Γ_{x^5} translacijom za 1 prema gore:

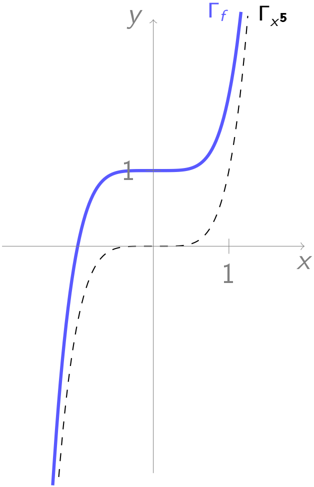


Primjer 2

Definiramo

$$f(x) := x^5 + 1.$$

Γ_f se dobije iz Γ_{x^5} translacijom za 1 prema gore:



Primjer 3

Definiramo

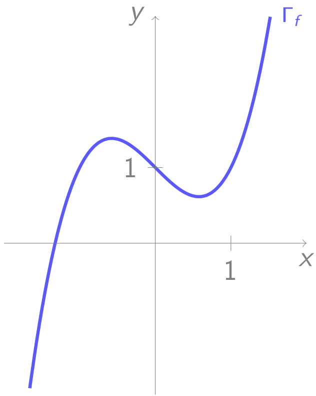
$$f(x) := x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1.$$

Primjer 3

Definiramo

$$f(x) := x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1.$$

Γ_f je prikazan na sljedećoj slici:

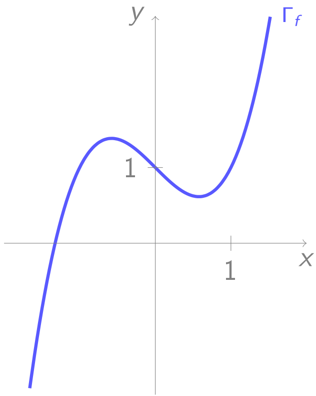


Primjer 3

Definiramo

$$f(x) := x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1.$$

Γ_f je prikazan na sljedećoj slici:



Koristan alat za predočavanje grafova funkcija, provjeru rješenja zadataka i sl.: `https://www.wolframalpha.com/`.

Faktorizacija polinoma u linearne faktore; kratnost nultočke

Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

stupnja $n > 0$ ima faktorizaciju oblika

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \tag{1}$$

za neke $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ – **nultočke** od f. (Brojevi $x_1, \ldots, x_n$ nisu nužno svi međusobno različiti, ali su jedinstveni do na poredak.)

Faktorizacija polinoma u linearne faktore; kratnost nultočke

Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

stupnja $n > 0$ ima faktorizaciju oblika

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \tag{1}$$

za neke $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ – **nultočke** od f. (Brojevi $x_1, \ldots, x_n$ nisu nužno svi međusobno različiti, ali su jedinstveni do na poredak.)

Zapišimo faktorizaciju (1) u obliku

$$f(x) = a_n (x - y_1)^{k_1} (x - y_2)^{k_2} \cdots (x - y_r)^{k_r},$$

gdje su $y_1, \ldots, y_r \in \mathbb{C}$ međusobno različiti. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, broj k_i zove se **kratnost nultočke** y_i.

Faktorizacija polinoma u linearne faktore; kratnost nultočke

Polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

stupnja $n > 0$ ima faktorizaciju oblika

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \tag{1}$$

za neke $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ – **nultočke** od f. (Brojevi $x_1, \ldots, x_n$ nisu nužno svi međusobno različiti, ali su jedinstveni do na poredak.)

Zapišimo faktorizaciju (1) u obliku

$$f(x) = a_n(x - y_1)^{k_1}(x - y_2)^{k_2}\cdots(x - y_r)^{k_r},$$

gdje su $y_1, \ldots, y_r \in \mathbb{C}$ međusobno različiti. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$, broj k_i zove se **kratnost nultočke** y_i.

PR.: Broj 1 je nultočka polinoma $f(x) := x(x-1)^3(x-5)^2$ kratnosti 3.

Još dvije korisne činjenice o polinomima

Neka je f polinom stupnja $n > 0$.

Neka je f polinom stupnja $n > 0$.

- Γ_f prelazi iz rasta u pad ili obratno najviše $n - 1$ puta.

Još dvije korisne činjenice o polinomima

Neka je f polinom stupnja $n > 0$.

- Γ_f prelazi iz rasta u pad ili obratno najviše $n-1$ puta.
- Formula za nultočke od f u terminima koeficijenata i operacija $+, -, \cdot, /$ i $\sqrt[m]{\cdot}$ postoji samo za $n \leq 4$.
  (Teorija koja dokazuje nepostojanje takve formule za $n \geq 5$ zove se Galoisova teorija i temelji se na radu N. H. Abela (1802.–1829.) i É. Galoisa (1811.–1832.).)